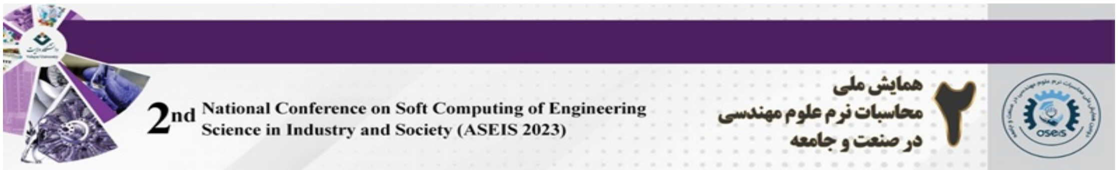

بررسی ویژگی‌ها و نتایج جدید در مورد شرط $(E'P)$ از S_سیستم‌های راست

پویان خامه‌چی[۱]*

[۱] استادیار دانشگاه ولایت ایرانشهر، p.khamechi@velayat.ac.ir

---

چکیده. در [۲] کیلپ و کناور شرط (E) و شرط (P) را معرفی کردند و در [۳]، لان تعمیمی از شرط (E)، یعنی شرط (E') را معرفی کرد. در سال ۲۰۰۶ شرط $(E'P)$ که تعمیمی از شرط‌های (E)، (P) و (E') می‌باشد توسط گلچین و محمدزاده معرفی شد. مطالعه شرط $(E'P)$ در ارتباط با سایر ویژگی‌های S_سیستم‌ها، درک بهتری از رفتار S_سیستم‌ها و شرط‌های (P') و (E') فراهم میکند. در این مقاله مطالعات مربوط به شرط فوق و برخی ویژگی‌های S_سیستم‌ها را ادامه می‌دهیم. یک معادل برای شرط $(E'P)$ ارائه می‌دهیم که به نوبه خود اهمیت این شرط را نشان می‌دهد. همچنین یک دسته‌بندی از مونوئیدها برای همه سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$ و یک دسته‌بندی از مونوئیدها به طوری که سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، دارای خواص هموار باشند و بالعکس، ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: S_سیستم، شرط $(E'P)$، مونوئید تاشونده.

طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 20M30, 20M50.

---

۱. مقدمه

در این مقاله با چیزی که به طور کلی به عنوان طبقه‌بندی همولوژیک مونوئیدها بر اساس ویژگی‌های هموار شناخته می‌شود، سروکار داریم. در سالهای اخیر مقالات بسیاری در مورد بررسی شرایط یک مونوئید که برای انطباق خواص هموار مختلف، چه برای همه سیستم‌های راست، چه برای سیستم‌های راست از نوع خاص، لازم و کافی است، منتشر شده است. شرط‌های (P) و (E) از سیستم‌ها روی مونوئیدها در بسیاری از مقالات مورد توجه قرار گرفته است و مونوئیدها زمانی طبقه‌بندی می‌شوند که این شرط‌ها برای سیستم‌ها ویژگی‌های هموار دیگر را نتیجه دهند و بالعکس. در این مقاله یک تعمیم از این شرایط و شرط (E') را معرفی کرده، یک طبقه‌بندی از مونوئیدها بر اساس این شرط و یک طبقه‌بندی از مونوئیدها به طوری که این شرط برای سیستم‌ها برخی از خواص هموار دیگر را نتیجه دهد ارائه می‌دهیم.

۲. ویژگی‌های کلی

تعریف ۱.۲. از [۲,۳] یادآوری می‌کنیم که:

S_سیستم راست A در شرط (E') صدق می‌کند هرگاه برای هر $a \in A$ و $s, s', z \in S$،

$$\Big((as = as' \wedge sz = s'z) \Longrightarrow (\exists a' \in A)(\exists u \in S)(a = a'u \wedge us = us')\Big).$$

S_سیستم راست A در شرط (EP) صدق می‌کند هرگاه برای هر $a \in A$ و $s, s' \in S$،

$$\Big((as = as') \Longrightarrow (\exists a' \in A)(\exists u, u' \in S)(a = a'u = a'u' \wedge us = u's')\Big).$$

S_سیستم راست A در شرط $(E'P)$ صدق می‌کند هرگاه برای هر $a \in A$ و $s, s', z \in S$،

---

* Khamechi Pouyan

$$\Big((as=as'\wedge sz=s'z)\Longrightarrow(\exists a'\in A)(\exists u,u'\in S)(a=a'u=a'u'\wedge us=u's')\Big).$$

S_سیستم راست A در شرط (GP) صدق می‌کند، هرگاه برای هر $a,a'\in A$ و $s,t\in S$،

$$\Big((as=a't)\Rightarrow(\exists a''\in A)(\exists u,v\in S)(\exists n\in\mathbb{N})(a=a''u,a'=a''v,us^n=vt^n)\Big).$$

S_سیستم راست A در شرط GP-(P) صدق می‌کند هرگاه برای هر $a,a'\in A$ و $s\in S$،

$$\Big((as=a's)\Rightarrow(\exists a''\in A)(\exists u,v\in S)(\exists n\in\mathbb{N})(a=a''u,a'=a''v,us^n=vs^n)\Big).$$

بوضوح $(P')\Longleftarrow(E'P)$. در این قسمت نشان می‌دهیم عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید S یک مونوئید و ρ یک همنهشتی روی S باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند:

(۱) برای هر $x,y,z\in S$، $x\rho y$ و $xz=yz$ نتیجه می‌دهد $u,v\in S$ موجودند به طوری که $1\rho u\rho v$ و $ux=vy$.
(۲) برای هر $x,t,t',z\in S$، $xt\rho xt'$ و $tz=t'z$ نتیجه می‌دهد $u,v\in S$ موجودند به طوری که $x\rho u\rho v$ و $ut=vt'$.
(۳) S/ρ در شرط $(E'P)$ صدق می‌کند.

قضیه ۳.۲. برای مونوئید S، عبارت‌های زیر معادلند:

(۱) همه S_سیستم‌های راست در شرط $(E'P)$ صدق می‌کنند.
(۲) همه S_سیستم‌های راست تک‌مولدی در شرط $(E'P)$ صدق می‌کنند.
(۳) همه S_سیستم‌های راست خارج‌قسمتی ریس در شرط $(E'P)$ صدق می‌کنند.
(۴) برای هر $x,t,t',z\in S$، $tz=t'z$ نتیجه می‌دهد $u,v\in S$ موجودند به طوری که $x\rho(xt,xt')u\rho(xt,xt')v$ و $ut=vt'$.
(۵) برای هر $x,y,z\in S$، $xz=yz$ نتیجه می‌دهد $u,v\in S$ موجودند به طوری که $1\rho(x,y)u\rho(x,y)v$ و $ux=vy$.
(۶) برای هر $x,y,z\in S$، $xz=yz$ نتیجه می‌دهد $x=y$ یا $xS\cup yS=S$.

اثبات. استلزام‌های (۱) $\Longleftarrow$ (۲) و (۱) $\Longleftarrow$ (۳) واضح هستند.
(۲) $\Longleftarrow$ (۴). برای $x,t,t',z\in S$، فرض کنید $tz=t'z$. بنابر فرض S_سیستم راست تک‌مولدی $S/\rho(xt,xt')$ در شرط $(E'P)$ صدق می‌کند و لذا بنابر قضیه ۲.۲، $u,v\in S$ موجودند به طوری که $x\rho(xt,xt')u\rho(xt,xt')v'$ و $ut=vt'$.
(۴) $\Longleftarrow$ (۵). با قرار دادن $x\longleftarrow 1$، $t\longleftarrow x$ و $t'\longleftarrow y$ نتیجه مطلوب بلافاصله حاصل می‌شود.
(۵) $\Longleftarrow$ (۲). فرض کنید ρ یک همنهشتی راست روی S باشد و برای $x,y,z\in S$، $x\rho y$ و $xz=yz$. بنابر فرض $u,v\in S$ موجود است به طوری که $1\rho(x,y)u\rho(x,y)v$ و $ux=vy$. چون $\rho(x,y)\subseteq\rho$، $1\rho u\rho v$ و لذا بنابر قضیه ۲.۲، در شرط $(E'P)$ صدق می‌کند.
(۳) $\Longleftarrow$ (۶). برای $x,y,z\in S$، فرض کنید $xz=yz$ و $x\neq y$. در این صورت $K=xS\cup yS$ یک ایدآل راست S است و بنابر فرض S/K در شرط $(E'P)$ صدق می‌کند. از این رو بنابر قضیه ۲.۲، $K=xS\cup yS=S$.
(۶) $\Longleftarrow$ (۵). برای $x,y,z\in S$، فرض کنید $xz=yz$ و $x\neq y$. بنابر فرض x یا y دارای وارون راست است. بدون کاستن از کلیت مساله، فرض کنید $xS=S$. در این صورت $l\in S$ موجود است به طوری که $xl=1$. بوضوح $lx\in E(S)$. اگر $E(S)=\{1\}$، آنگاه $lx=1$. در غیر این صورت $e\in E(S)\setminus\{1\}$ وجود دارد. چون $le.e=l.e$، بنابر فرض، $le=l$ یا $leS\cup lS=S$. بنابراین $le=l$ یا $lS=S$. اگر $le=l$، آنگاه $xle=xl$ و لذا $e=1$، که تناقض می‌باشد. پس $lS=S$ که نتیجه می‌دهد $l'\in S$ موجود است به طوری که $ll'=1$. از این رو

$$xl=1\Rightarrow xll'=l'\Rightarrow x=l'\Rightarrow 1=xl=lx.$$

حال

$$(x,y)\in\rho(x,y)\Rightarrow(1,yl)\in\rho(x,y)\Rightarrow\rho(1,yl)\subseteq\rho(x,y).$$

همچنین
$$(۱, yl) \in \rho(۱, yl) \Rightarrow (x, ylx) = (x, y) \in \rho(۱, yl) \Rightarrow \rho(x, y) \subseteq \rho(۱, yl).$$
بنابراین $\rho(x,y) = \rho(۱, yl)$. حال با قرار دادن $u = yl$ و $v = ۱$، به دست می‌آوریم $۱\rho(x,y)u\rho(x,y)v$ و $ux = ylx = y = vy$.
$(۶) \Longleftarrow (۱)$. فرض کنید A، یک S_سیستم راست باشد و برای $a \in A$ و $s, t, z \in S$، $as = at$ و $sz = tz$. اگر $s = t$، قرار می‌دهیم $u = v = ۱$. حال فرض کنید $s \neq t$. بنابر فرض $sS \cup tS = S$ که نتیجه می‌دهد $sS = S$ یا $tS = S$. بدون کم شدن از کلیت مساله، فرض کنید $sS = S$. در این صورت $l \in S$ موجود است به طوری که $sl = ۱$. با استدلال مشابه $(۶) \Longleftarrow (۵)$، $sl = ls = ۱$ و قرار می‌دهیم $u = tl$ و $v = ۱$. □

حال برای ویژگی همواری و شرط (PWP_E)، با در نظر گرفتن دو قضیه زیر، قضیه بعد را خواهیم داشت.

قضیه ۴.۲. [۴، قضیه ۲۰۸] برای مونوئید S، عبارت‌های زیر معادلند:
(۱) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، در شرط (P_E) صدق می‌کنند.
(۲) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، ضعیف هموار هستند.
(۳) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، به طور اساسی ضعیف هموار هستند.
(۴) S منظم است.

قضیه ۵.۲. [۶، قضیه ۲۰۱] فرض کنید S یک مونوئید PP چپ و A یک S_سیستم راست باشد. در این صورت A هموار ضعیف است اگر و تنها اگر A در شرط (P_E) صدق کند.

قضیه ۶.۲. برای مونوئید S، عبارت‌های زیر معادلند:
(۱) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، در شرط (P_E) صدق می‌کنند.
(۲) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، هموار هستند.
(۳) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، ضعیف هموار هستند.
(۴) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، به طور اساسی ضعیف هموار هستند.
(۵) همه S_سیستم‌های راست صادق در شرط $(E'P)$، در شرط (PWP_E) صدق می‌کنند.
(۶) S منظم است.

اینک نشان می‌دهیم که عکس استلزام $(E'P) \Longleftarrow (P')$ در چه صورتی برقرار است.

قضیه ۷.۲. فرض کنید S یک مونوئید و A یک S_سیستم راست باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند:
(۱) A در شرط (P') صدق می‌کند.
(۲) A در شرط‌های $(E'P)$ و (PWP) صدق می‌کند.
(۳) A در شرط‌های $(E'P)$ و GP-(P) صدق می‌کند.

اثبات. $(۲) \Longleftarrow (۱)$. چون شرط (P')، شرط‌های (PWP) و $(E'P)$ را نتیجه می‌دهد، این استلزام واضح است.
$(۳) \Longleftarrow (۲)$. چون شرط (PWP) شرط GP-(P) را نتیجه می‌دهد، این استلزام نیز واضح است.
$(۱) \Longleftarrow (۳)$. برای $a, a' \in A$ و $s, t, z \in S$، فرض کنید $as = a't$ و $sz = tz$. در این صورت $a(sz) = a'(tz) = a'(sz)$. چون A در شرط GP-(P) صدق می‌کند، $a^* \in A$، $w_۱, w_۲ \in S$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند به طوری که $a = a^*w_۱$، $a' = a^*w_۲$ و $w_۱(sz)^n = w_۲(sz)^n = w_۲(tz)^n$. حال $as = a't$ و $sz = tz$ نتیجه می‌دهد $a^*(w_۱s) = a^*(w_۲t)$ و $(w_۲t)z(sz)^{n-۱} = (w_۲t)z(tz)^{n-۱} = (w_۱s)z(sz)^{n-۱}$. چون A در شرط $(E'P)$ صدق می‌کند، $l_۱, l_۲ \in S$ و $a'' \in A$ موجودند به طوری که $a^* = a''l_۱ = a''l_۲$ و $l_۱(ws) = l_۲(w_۲t)$. با قرارداد $u = l_۱w_۱$ و $v = l_۲w_۲$، داریم $a = a^*w_۱ = a''l_۱w_۱ = a''u$، $a' = a^*w_۲ = a''l_۲w_۲ = a''v$ و $us = vt$، که حکم ثابت می‌شود. □

در [۵] نشان داده شده است که شرط (P) شرط (EP) را نتیجه می‌دهد، اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. همچنین در [۱] نشان داده شده است شرط (P) شرط (GP) را نتیجه می‌دهد، اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نمی‌باشد. در قضیه زیر عکس روابط فوق را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۸.۲. فرض کنید S یک مونوئید و A یک Sـسیستم راست باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند:

(۱) A در شرط (P) صدق می‌کند.

(۲) A در شرط‌های (GP) و (EP) صدق می‌کند.

اثبات. (۱) $\Longleftarrow$ (۲). چون شرط (P) شرط‌های (GP) و (EP) را نتیجه می‌دهد، این استلزام واضح است.
(۲) $\Longleftarrow$ (۱). برای $a, a' \in A$ و $s, t \in S$، فرض کنید $as = a't$. چون A در شرط (GP) صدق می‌کند، $a^* \in A$، $w_1, w_2 \in S$ و $n \in \mathbb{N}$ موجودند به طوری که $a = a^*w_1$، $a' = a^*w_2$ و $w_1s^n = w_2t^n$. لذا $a^*(w_1s) = a^*(w_2t)$. چون A در شرط (EP) صدق می‌کند، $a'' \in A$ و $l_1, l_2 \in S$ موجوند به طوری که $a^* = a''l_1 = a''l_2$ و $l_1w_1s = l_2w_2t$. با قرار دادن $u = l_1w_1$ و $v = l_2w_2$، داریم $us = vt$، $a = a^*w_1 = a''l_1w_1 = a''u$ و $a' = a^*w_2 = a''l_2w_2 = a''v$ و حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۹.۲. فرض کنید S یک مونوئید تاشونده راست باشد. در این صورت عبارت‌های زیر معادلند:

(۱) همه Sـسیستم‌های راست، در شرط (P) صدق می‌کنند.

(۲) همه Sـسیستم‌های راست، در شرط‌های (WP) و (EP) صدق می‌کنند.

(۳) همه Sـسیستم‌های راست، در شرط‌های (PWP) و (EP) صدق می‌کنند.

(۴) همه Sـسیستم‌های راست، در شرط‌های GP-(P) و (EP) صدق می‌کنند.

اثبات. چون شرط $(P) \Longrightarrow (WP) \Longrightarrow (PWP) \Longrightarrow GP - (P)$ و همچنین $(P) \Longrightarrow (EP)$، استلزام‌های (۱) $\Longleftarrow$ (۲) $\Longleftarrow$ (۳) $\Longleftarrow$ (۴) واضح هستند.
(۴) $\Longleftarrow$ (۱). چون S تاشونده راست است، بوضوح شرط‌های (P') و (P) و همچنین شرط‌های (EP) و $(E'P)$ معادلند. لذا بنابر قضیه ۷.۲، نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

۳. نتیجه‌گیری

در سال ۲۰۰۶، شرط $(E'P)$ توسط گلچین و محمدزاده معرفی شد و قضایای مرتبط با آن به اثبات رسید. همانگونه که مشاهده کردیم در این مقاله به ادامه مطالعه در رابطه با شرط مورد نظر پرداختیم و برای برخی از ویژگی‌ها در Sـسیستم‌ها بر اساس آن معادل ارائه نمودیم که به نوبه خود اهمیت این شرط را نشان میدهد. با توجه به اینکه شرط $(E'P)$ تعمیم شرط‌های (P') و (E') است، بنابراین مطالعه این شرط در رابطه با سایر خصوصیات Sـسیستم‌ها درک بهتری از رفتار Sـسیستم‌ها و بخصوص شرط‌های (P') و (E') فراهم می‌کند.

تشکر و قدردانی

اینجانب با آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون مراتب سپاسگزاری و قدردانی خود را از تمامی دست‌اندرکاران و برگزارکنندگان دومین همایش محاسبات نرم علوم مهندسی در جامعه وصنعت، اعلام می‌دارد. امید است در سال‌های آتی نیز شاهد ادامه برگزاری این همایش مفید و سازنده باشیم.

مراجع

1. Abassi, M., Golchin, A., Mohammadzadeh, H., Characterization of monoids by condition (GP), Asian-Eur. J. Math., Vol. 10, No. 1, pp. 1-30, 2017.
2. Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A., “Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs”, A handbook for students and researchers, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
3. Laan, V., Pullbacks and flatness properties of acts, Ph.D thesis, Department of Mathematics, University of Tartu, Tartu, Estonia 1999.
4. Golchin, A., Mohammadzadeh, H., On Condition $(E'P)$, J. Sci. Islam. Repub. Iran, Vol. 17, No. 4, pp. 343-349, 2006.
5. Golchin, A., Mohammadzadeh, H., On Condition (EP), Int. Math. Forum, Vol. 2, No. 19, pp. 911-918, 2007.

6. Golchin, A., Mohammadzadeh, H., On homological classification of monoids by Condition (P_E) of right acts, Ital. J. Pure Appl. Math., Vol. 25, pp. 175-186, 2009.