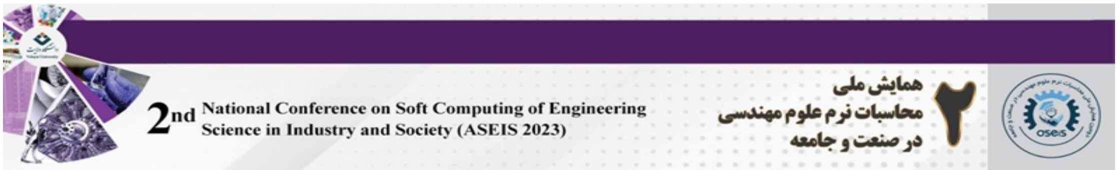

برخی نتایج در مورد دنباله‌های دقیق کوتاه ریس

پویان خامه‌چی[۱]*

[۱] استادیار دانشگاه ولایت ایرانشهر، p.khamechi@velayat.ac.ir

چکیده. در این مقاله ابتدا دنباله دقیق کوتاه ریس از سیستم‌ها را معرفی می‌کنیم و سپس شرایطی را ارائه می‌دهیم که این دنباله‌ها تجزیه راست و چپ باشند. همچنین نشان می‌دهیم که تجزیه راست و چپ بودن دنباله‌های دقیق در سیستم‌ها با تجزیه دنباله‌های دقیق در مدول‌ها متفاوت است.

در این مقاله S یک مونوئید صفردار است و تمامی S–سیستم‌های راست و چپ نیز دارای صفر هستند.

واژه‌های کلیدی: S–سیستم، دنباله دقیق کوتاه ریس، تجزیه راست.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 20M30, 20M50.

۱. مقدمه

فرض کنید $f : L_S \longrightarrow M_S$ و $g : M_S \longrightarrow N_S$ دو همریختی بین S–سیستم‌های راست باشند. فرض کنید

$$\ker f = \{(l_1, l_2) \in L \times L | f(l_1) = f(l_2)\}$$

و

$$\mathcal{K}_{Imf} = (f(L) \times f(L)) \cup 1_M.$$

در این صورت $kerf$ و $\mathcal{K}_{Imf}$ به ترتیب همنهشتی‌هایی روی L و M هستند. دنباله

$$\cdots \longrightarrow L_S \xrightarrow{f} M_S \xrightarrow{g} N_S \longrightarrow \cdots$$

در M_S، دقیق نامیده می‌شود هرگاه $kerg = \mathcal{K}_{Imf}$.

تعریف ۱.۱. اگر دنباله

$$0 \longrightarrow L_S \xrightarrow{f} M_S \xrightarrow{g} N_S \longrightarrow 0 \quad (1)$$

در L_S، M_S و N_S دقیق باشد آنگاه یک دنباله دقیق کوتاه ریس نامیده می‌شود.

* Khamechi Pouyan

۲. ویژگی‌های کلی

در این قسمت نشان می‌دهیم که اگر دنباله (۱)، یک دنباله دقیق کوتاه ریس باشد آنگاه f تکریختی و g برویختی است. همچنین $gf = \circ$. دنباله (۱) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\circ \xrightarrow{\alpha} L_S \xrightarrow{f} M_S \xrightarrow{g} N_S \xrightarrow{\beta} \circ$$

ابتدا فرض کنید $f(l_۱) = f(l_۲)$. در این صورت $(l_۱, l_۲) \in kerf = \mathcal{K}_{Im\alpha}$. پس $(l_۱, l_۲) \in \big(\alpha(\circ)\times\alpha(\circ)\big)\cup ۱_L$ که نتیجه می‌شود $l_۱ = l_۲$. بنابراین f تکریختی است. از طرفی چون $ker\beta = N_S \times N_S$، لذا

$$(g(M) \times g(M)) \cup ۱_N = \mathcal{K}_{Img} = N_S \times N_S.$$

اگر $|N_S| = ۱$ به وضوح g پوشاست. فرض کنید $n \neq n' \in N_S$. در این صورت

$$(n, n') \in g(M) \times g(M)$$

که نتیجه می‌دهد g پوشاست. حال فرض کنید $l \in L_S$. در این صورت

$$\big(f(l), f(\circ)\big) \in f(L) \times f(L') \subseteq \ker g.$$

بنابراین $g(f(l)) = g(f(\circ)) = g(\circ) = \circ$. پس $gf = \circ$.

دنباله دقیق کوتاه ریس (۱) تجزیه چپ (راست) نامیده می‌شود هرگاه Sـهمریختی

$$f' : M_S \longrightarrow L_S \ (g' : N_S \longrightarrow M_S)$$

موجود باشد به طوری که $ff' = ۱_{L_S}$ $(gg' = ۱_{N_S})$، که ۱_{L_S} (۱_{N_S}) نگاشت همانی روی L_S (N_S) است.

مثال ۱.۲. فرض کنید L یک زیرسیستم از Sـسیستم راست M باشد. در این صورت دنباله

$$\circ \xrightarrow{\alpha} L \overset{i}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{\pi} M/L \xrightarrow{\beta} \circ$$

یک دنباله دقیق کوتاه ریس است که در آن i نگاشت شمول و π برویختی کانونی است زیرا:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{Im\alpha} &= \big(\alpha(\circ) \times \alpha(\circ)\big) \cup ۱_L = (\circ, \circ) \cup ۱_L = ۱_L,\\
\ker i &= \Big\{(l_۱, l_۲) \in L \times L | i(l_۱) = i(l_۲)\Big\}\\
&= \Big\{(l_۱, l_۲) \in L \times L | l_۱ = l_۲\Big\} = ۱_L,
\end{aligned}$$

لذا $\mathcal{K}_{Im\alpha} = \ker i$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{Imi} &= \big(i(L) \times i(L)\big) \cup ۱_M = (L \times L) \cup ۱_M,\\
\ker \pi &= \Big\{(m, m') \in M \times M | \pi(m) = \pi(m')\Big\}\\
&= \Big\{(m, m') \in M \times M | [m] = [m']\Big\}\\
&= \Big\{(m, m') \in M \times M | m, m' \in L \vee m = m'\Big\},
\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{K}_{Imi} = \ker \pi$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_{Im\pi} &= \big(\pi(M) \times \pi(M)\big) \cup ۱_{M/L}\\
&= (M/L \times M/L) \cup ۱_{M/L} = M/L \times M/L = \ker \beta.
\end{aligned}$$

تعریف ۲.۲. فرض کنید M، یک Sـسیستم راست باشد. زیرسیستم $M_۱$ از M یک جمعوند مستقیم نامیده می‌شود هرگاه زیرسیستم $M_۲$ از M موجود باشد به طوری که $M = M_۱ \oplus M_۲$ که $M_۱ \oplus M_۲$ هم‌حاصل‌ضرب زیرسیستم‌های $M_۱$ و $M_۲$ است.

همان‌گونه که می‌دانیم یک دنباله دقیق کوتاه از مدول‌ها تجزیه چپ است اگر و تنها اگر تجزیه راست باشد. اما این عبارت در رسته S_سیستم‌ها برقرار نیست. این اظهارات معنادار است زیرا در نگاه اول به نظر می‌رسد که می‌توان چنین نتیجه‌ای را به رسته S_سیستم‌ها تعمیم داد و لذا اشتباهاتی رخ می‌دهد. اینک مثال زیر را برای نشان دادن این وضعیت ارائه می‌دهیم.

مثال ۳.۲. فرض کنید $M_۱$ و $M_۲$ دو S_سیستم راست باشد و $M_۱ \times M_۲$ و $M_۱ \oplus M_۲$ به ترتیب حاصل‌ضرب و هم‌حاصل‌ضرب $M_۱$ و $M_۲$ باشد. برای $i = ۱, ۲$، قرار دهید:

$$\rho_i : M_۱ \oplus M_۲ \longrightarrow M_i, (j, x) \longmapsto \begin{cases} x & if\ j = i \\ \\ \circ & otherwise \end{cases};$$

$$p_i : M_۱ \times M_۲ \longrightarrow M_i,\ (m_۱, m_۲) \longmapsto m_i;$$
$$\lambda_۱ : M_۱ \longrightarrow M_۱ \times M_۲,\ m_۱ \longmapsto (m_۱, \circ);$$
$$\lambda_۲ : M_۲ \longrightarrow M_۱ \times M_۲,\ m_۲ \longmapsto (\circ, m_۲).$$

ابتدا نشان می‌دهیم که نگاشت‌های فوق، S_همریختی هستند.

$$\rho_i((j, xs)) = \begin{cases} xs & if\ j = i \\ \\ \circ & otherwise \end{cases}.$$

اگر $j = i$ آنگاه

$$\rho_i\big((j, x)\big)s = xs = \rho_i\big((j, xs)\big) = \rho_i\big((j, x)s\big).$$

در غیر این صورت

$$\rho_i\big((j, x)\big)s = \circ s = \circ = \rho_i\big((j, xs)\big) = \rho_i\big((j, x)s\big).$$

بنابراین ρ_i، S_همریختی است. همچنین

$$p_i\big((m_۱, m_۲)s\big) = p_i\big((m_۱s, m_۲s)\big) = m_is = p_i\big((m_۱, m_۲)\big)s.$$

بنابراین p_i، S_همریختی است. از طرفی

$$\lambda_۱(m_۱s) = (m_۱s, \circ) = (m_۱s, \circ s) = (m_۱, \circ)s = \lambda_۱(m_۱)s.$$
$$\lambda_۲(m_۲s) = (\circ, m_۲s) = (\circ s, m_۲s) = (\circ, m_۲)s = \lambda_۲(m_۲)s.$$

بنابراین $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ نیز S_همریختی هستند. اکنون نشان می‌دهیم دنباله

$$\circ \xrightarrow{\alpha} M_۱ \overset{i}{\hookrightarrow} M_۱ \oplus M_۲ \xrightarrow{\rho_۲} M_۲ \xrightarrow{\beta} \circ \ (۱)$$

یک دنباله دقیق کوتاه ریس است که تجزیه راست و چپ می‌باشد.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{Im\alpha} &= \big(\alpha(\circ) \times \alpha(\circ)\big) \cup ۱_{M_۱} = (\circ, \circ) \cup ۱_{M_۱} = ۱_{M_۱}. \\ \ker i &= \Big\{(m, m') \in M_۱ \times M_۱ | i(m) = i(m')\Big\} \\ &= \Big\{(m, m') \in M_۱ \times M_۱ | (۱, m) = (۱, m')\Big\} \\ &= \Big\{(m, m') \in M_۱ \times M_۱ | m = m'\Big\} = ۱_{M_۱}. \end{aligned}$$

پس $\mathcal{K}_{Im\alpha} = \ker i$.

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{Imi} &= \big(i(M_۱) \times i(M_۱)\big) \cup ۱_{M_۱ \oplus M_۲} \\ &= \big((۱ \times M_۱ \setminus \{\theta_۱\}) \times (۱ \times M_۱ \setminus \{\theta_۱\})\big) \cup \big((۱ \times M_۱ \setminus \{\theta_۱\}) \times \{\theta\}\big) \\ \cup &\ \ \big(\{\theta\} \times (۱ \times M_۱ \setminus \{\theta_۱\})\big) \cup (\theta, \theta) \cup \big((۱, \theta_۱), (۱, \theta_۱)\big) \end{aligned}$$

$$\cup \quad \Big\{\big((۲,x),(۲,x)\big)|x\in M_۲\Big\} = \ker \rho_۲.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{Im\rho_۲} &= \big(\rho_۲(M_۱\oplus M_۲)\times \rho_۲(M_۱\oplus M_۲)\big)\cup ۱_{M_۲}\\ &= (M_۲\times M_۲)\cup ۱_{M_۲} = (M_۲\times M_۲) = \ker\beta.\end{aligned}$$

بنابراین دنباله (۱)، یک دنباله دقیق کوتاه ریس است. همچنین:

$$\rho_۱ i(m_۱) = \rho_۱\big((۱,m_۱)\big) = m_۱ \Longrightarrow \rho_۱ i = ۱_{M_۱}.$$

با در نظر گرفتن Sـ همریختی

$$\begin{aligned}\iota : M_۲ &\longrightarrow M_۱\oplus M_۲\\ m_۲ &\longmapsto (۲,m_۲)\end{aligned}$$

داریم:

$$\rho_۲\iota(m_۲) = \rho_۲\big((۲,m_۲)\big) = m_۲ \Longrightarrow \rho_۲\iota = ۱_{M_۲}.$$

از این رو دنباله (۱)، تجزیه چپ و راست است. حال دنباله

$$\circ \longrightarrow M_۱ \xrightarrow{\lambda_۱} M_۱\times M_۲ \xrightarrow{p_۲} M_۲ \longrightarrow \circ \quad (۲)$$

را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{Im\lambda_۱} &= \big(\lambda_۱(M_۱)\times\lambda_۱(M_۱)\big)\cup ۱_{M_۱\times M_۲} = \big((M_۱\times\{\circ\})\times(M_۱\times\{\circ\})\big)\\ &\cup \quad \Big\{\big((m_۱,m_۲),(m_۱,m_۲)\big)|m_۱\in M_۱, m_۲\in M_۲\Big\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ker p_۲ &= \Big\{\big((m_۱,m_۲),(m'_۱,m'_۲)\big)\in (M_۱\times M_۲)\times(M_۱\times M_۲)|\\ &\quad p_۲(m_۱,m_۲) = p_۲(m'_۱,m'_۲)\Big\}\\ &= \Big\{\big((m_۱,m_۲),(m'_۱,m'_۲)\big)\in (M_۱\times M_۲)\times(M_۱\times M_۲)|m_۲ = m'_۲\Big\}.\end{aligned}$$

دنباله (۲) در صورتی دقیق است که $\mathcal{K}_{Im\lambda_۱} = \ker p_۲$ و این زمانی رخ می‌دهد که $M_۱ = \circ$ یا $M_۲ = \circ$. این در حالی است که چنین دنباله‌ای در مدول‌ها، دقیق است. بنابراین بایستی دقت کرد که بین دنباله‌های دقیق از مدول‌ها و دنباله‌های دقیق از S-سیستم‌ها، تفاوت‌هایی وجود دارد.

در این قسمت، شرایطی را برای تجزیه بودن یک دنباله دقیق کوتاه ریس ارائه می‌دهیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید

$$\circ \longrightarrow L_S \xrightarrow{f} M_S \xrightarrow{g} N_S \longrightarrow \circ \quad (۱)$$

یک دنباله دقیق کوتاه ریس از Sـ سیستم‌ها باشد. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند:

(i) دنباله (۱) تجزیه راست است اگر و فقط اگر $f(L)$ یک جمعوند مستقیم از M باشد. از سوی دیگر اگر این مورد باشد آنگاه (۱) تجزیه راست و چپ است.

(ii) دنباله (۱) تجزیه چپ است اگر و فقط اگر همریختی $\phi : M \longrightarrow L\times N$ موجود باشد به طوری که $Im(\phi f) = L\times\circ$ و $\phi f : L \longrightarrow L\times\circ$، Sـ یکریختی باشد.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم برای هر $m\in M$، $m\in f(L)$ اگر و تنها اگر $g(m) = \circ$. با توجه به اینکه دنباله (۱) یک دنباله دقیق کوتاه ریس است لذا $gf = \circ$. ابتدا فرض کنید $m\in f(L)$. در این صورت $l\in L$ موجود است به طوری که $m = f(l)$. بنابراین:

$$g(m) = g(f(l)) = gf(l) = \circ.$$

حال فرض کنید $g(m) = \circ$. در این صورت $g(m) = \circ = g(\circ)$ و لذا

$$(m,\circ)\in\ker g = \mathcal{K}_{Imf} = \big(f(L)\times f(L)\big)\cup ۱_M.$$

اگر $(m,\circ)\in 1_M$ آنگاه $m=\circ\in f(L)$ و حکم ثابت می‌شود. در غیر این صورت $(m,\circ)\in f(L)\times f(L)$ و لذا $m\in f(L)$ که در این حالت نیز حکم به دست می‌آید.
(i) فرض کنید دنباله (۱) تجزیه راست باشد. در این صورت بنابه تعریف، S_همریختی $g':N\longrightarrow M$ وجود دارد به طوری که $gg'=1_N$. ثابت می‌کنیم $M=f(L)\oplus g'g(M)$ و لذا $f(L)$ یک جمعوند مستقیم از M است. برای این منظور فرض کنید $m\in M$ به گونه‌ای باشد که $m\notin f(L)$. قرار دهید $g(m)=n$. در این صورت $g'(n)=g'g(m)$ نتیجه می‌دهد $gg'(n)=g(m)$ و لذا $(g'(n),m)\in\ker g=\mathcal{K}_{Imf}$. چون $m\notin f(L)$ داریم $g'(n)=m$ و در نتیجه $m=g'g(m)\in g'g(M)$. این نشان می‌دهد

$$M=f(L)\cup g'g(M).$$

حال نشان می‌دهیم این اجتماع، یک اجتماع $\circ$-مستقیم است. برای این منظور، به ازای $m\in M$ و $l\in L$ فرض کنید $f(l)=g'g(m)$. بنابراین $g(m)=gg'g(m)=gf(l)=\circ$ و لذا $f(l)=g'(g(m))=g'(\circ)=\circ$. این نتیجه می‌دهد $M=f(L)\oplus g'g(M)$. برای قسمت عکس فرض کنید به ازای زیرسیستم T از M، $M=f(L)\oplus T$. اینک نشان می‌دهیم $g|_T:T\longrightarrow N$ یک S_یکریختی است. چون g بروریختی است، برای هر $n\in N$، عضو $m\in M$ وجود دارد به طوری که $g(m)=n$. اگر $n\neq\circ$ آنگاه $m\notin f(L)$ زیرا در غیر این صورت به ازای $l\in L$ای، $m=f(l)$ و لذا $n=g(m)=g(f(l)))=gf(l)=\circ$ که تناقض است. حال با توجه به اینکه $m\notin f(L)$ و $M=f(L)\oplus T$، لذا $m\in T$. بنابراین $g|_T$، S_بروریختی است. حال به ازای $t_1,t_2\in T$، فرض کنید $g(t_1)=g(t_2)$. در این صورت $(t_1,t_2)\in\ker g=\mathcal{K}_{Imf}$. چون $\mathcal{K}_{Imf}=(f(L)\times f(L))\times 1_M$ و $T\cap f(l)=\circ$ نتیجه می‌شود $t_1=t_2$ یا $t_1=t_2=\circ$ که در هر دو حالت یک‌به‌یکی $g|_T$ به دست می‌آید. پس $g|_T$ یکریختی است. حال فرض کنید:

$$g'=i(g|_T)^{-1}:N\overset{(g|_T)^{-1}}{\longrightarrow}T\overset{i}{\hookrightarrow}M.$$

در این صورت g' یک S_همریختی است. همچنین به ازای هر $n\in N$،

$$gg'(n)=g\big(i(g|_T)^{-1}\big)(n)=g(g|_T)^{-1}(n)=n.$$

بنابراین $gg'=1_N$ که نتیجه می‌دهد دنباله (۱) تجزیه راست است. همچنین با توجه به اینکه به ازای زیرسیستم T از M، $M=f(L)\oplus T$، لذا $f(L)$ یک جمعوند مستقیم از M است. قرار می‌دهیم:

$$f'=f^{-1}\rho_1:M=f(L)\oplus T\overset{\rho_1}{\longrightarrow}f(L)\overset{f^{-1}}{\longrightarrow}L.$$

چون f' ترکیب دو همریختی است، لذا یک همریختی است. همچنین به ازای هر $l\in L$،

$$f'f(l)=f^{-1}\rho_1(f(l))=f^{-1}\rho_1\big((1,f(l)\big)=f^{-1}f(l)=l.$$

بنابراین $f'f=1_L$ که نتیجه می‌دهد دنباله (۱) تجزیه چپ است.
(ii) فرض کنید دنباله (۱) تجزیه چپ باشد. لذا S_همریختی $f':M\longrightarrow L$ وجود دارد به طوری که $f'f=1_L$. فرض کنید

$$\phi=M\longrightarrow L\times N,\ m\longmapsto\big(f'(m),g(m)\big).$$

با توجه به اینکه f' و g، S_همریختی هستند، ϕ نیز S_همریختی است. از طرفی:

$$\begin{aligned}Im(\phi f) &= \Big\{\phi f(l)|l\in L\Big\}=\Big\{\phi(f(l))|l\in L\Big\}\\ &= \Big\{\big(f'f(l),gf(l)\big)|l\in L\Big\}=\Big\{(l,\circ)|l\in L\Big\}=L\times\circ.\end{aligned}$$

حال به ازای $l_1,l_2\in L$ فرض کنید $\phi f(l_1)=\phi f(l_2)$. در این صورت $\phi(f(l_1))=\phi(f(l_2))$ و لذا

$$\big(f'f(l_1),gf(l_1)\big)=\big(f'f(l_2),gf(l_2)\big)$$

که نتیجه می‌دهد $(l_۱,۰)=(l_۲,۰)$. بنابراین $l_۱=l_۲$ و لذا ϕf یک‌به‌یک است. پس $\phi f: L\longrightarrow L\times ۰$ یکریختی است. بالعکس فرض کنید Sـهمریختی $\phi: M\longrightarrow L\times N$ موجود باشد به طوری که $Im(\phi f)=L\times ۰$ و $\phi f: L\longrightarrow L\times ۰$ یکریختی باشد. فرض کنید

$$f'=(\phi f)^{-۱}p_۱\phi: M\xrightarrow{\phi} L\times N\xrightarrow{p_۱} L\times ۰\xrightarrow{(\phi f)^{-۱}} L,$$

که در آن

$$p_۱: L\times N\longrightarrow L\times ۰,\ (l,n)\longmapsto (l,۰).$$

f' همریختی است زیرا ترکیب سه همریختی است. فرض کنید $l\in L$. در این صورت

$$\begin{aligned} f'f(l) &= f'(f(l))=(\phi f)^{-۱}p_۱\phi(f(l))=(\phi f)^{-۱}p_۱\phi f(l)\\ &= (\phi f)^{-۱}p_۱((l,۰))=(\phi f)^{-۱}((l,۰))=l, \end{aligned}$$

و لذا $f'f=۱_L$ که نتیجه می‌دهد دنباله (۱) تجزیه چپ است. □

بنابر قضیه ۴.۲ نتیجه زیر به دست می‌آید.

نتیجه ۵.۲. دنباله دقیق کوتاه ریس

$$۰\longrightarrow L\xrightarrow{f} M\xrightarrow{g} N\longrightarrow ۰$$

تجزیه راست است اگر و تنها اگر $(M\setminus f(L))\cup\{۰\}$ یک زیرسیستم از M باشد.

توجه کنید که یک دنباله دقیق کوتاه ریس تجزیه چپ، لزوماً تجزیه راست نیست. مثال زیر را ببینید.

مثال ۶.۲. فرض کنید $\mathbb{Z}/(۶)$ حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۶ باشد و

$$R=\left\{\begin{pmatrix} a & ۰\\ b & c\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{Z}/(۶)\right\}$$

زیرحلقه ماتریس‌های ۲×۲ روی $\mathbb{Z}/(۶)$ باشد. فرض کنید $(S,\cdot)$ نیم‌گروه ضربی R باشد و قرار دهید $e=\begin{pmatrix} ۱ & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}$. در این صورت

$$eS=\left\{\begin{pmatrix} a & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\middle| a\in\mathbb{Z}/(۶)\right\}$$

یک زیرسیستم از S_S است زیرا به ازای $\begin{pmatrix} x & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\in eS$ و $\begin{pmatrix} a & ۰\\ b & c\end{pmatrix}\in S$ داریم:

$$\begin{pmatrix} x & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & ۰\\ b & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xa & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\in eS.$$

فرض کنید

$$T=(S\setminus eS)\cup\{۰\}=\left\{\begin{pmatrix} a & ۰\\ b & c\end{pmatrix}\in S\middle| b\neq ۰ \text{ یا } c\neq ۰\right\}.$$

در این صورت T زیرسیستم S_S نیست زیرا اگر $t=\begin{pmatrix} ۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{pmatrix}\in T$ و $s=\begin{pmatrix} ۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\in S$، آنگاه

$$۰\neq ts=\begin{pmatrix} ۱ & ۰\\ ۳ & ۲\end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ۲ & ۰\\ ۰ & ۰\end{pmatrix}\notin T.$$

لذا بنابر نتیجه ۵.۲ دنباله دقیق کوتاه ریس

$$۰\longrightarrow eS\overset{i}{\hookrightarrow} S_S\xrightarrow{\pi} S/eS\longrightarrow ۰$$

تجزیه راست نیست. قرار دهید

$$i': S_S\longrightarrow eS,\ s\longmapsto es.$$

i'، Sـ همریختی است زیرا به ازای $s, t \in S$،
$$i'(st) = e(st) = (es)t = i'(s)t.$$
همچنین به ازای هر $es \in eS$،
$$i'i(es) = i'(es) = e(es) = es,$$
و لذا $i'i = ۱_{eS}$ که نتیجه می‌دهد دنباله (۱) تجزیه چپ است.

۳. نتیجه‌گیری

همانگونه که مشاهده شد تجزیه راست و چپ بودن دنباله‌های دقیق در نظریه Sـ سیستم‌ها با تجزیه دنباله‌های دقیق در مدول‌ها متفاوت است. در نگاه اول به نظر می‌رسد چنین نتیجه‌گیری را برای سیستم‌ها می‌توان متصور شد، ولی با بررسی دقیق دیده شد که چنین امری در حالت کلی صحیح نمی‌باشد.

تشکر و قدردانی

اینجانب با آرزوی سلامتی و موفقیت روزافزون مراتب سپاس‌گزاری و قدردانی خود را از تمامی دست‌اندرکاران و برگزارکنندگان دومین همایش محاسبات نرم علوم مهندسی در جامعه وصنعت، اعلام می‌دارد. امید است در سال‌های آتی نیز شاهد ادامه برگزاری این همایش مفید و سازنده باشیم.

مراجع

1. Chen, Y., Shum, K.P.: Rees short exact sequence of S-systems. Semigroup Forum 65, 141-148 (2002).
2. Jafari, M., Golchin, A., Mohammadzadeh Saany, H.: Rees short exact seqence and flatness properties. Semigroupe Forum 99, 32-46 (2019).
3. Kilp, M., Knauer, U., Mikhalev, A., “Monoids, acts and categories with applications to wreath products and graphs”, A handbook for students and researchers, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
4. Qia, H., Wei, C.: On a generalization of principal weak flatness property. Semigroup Forum 85, 147-159 (2012).