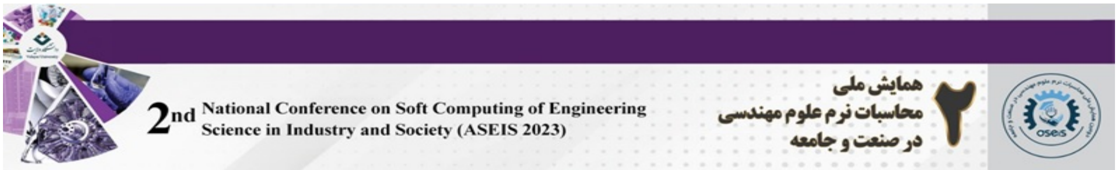


یک روش عددي براي حل مسائل مقدار ویژه اشتورم - لیوویل کسري تطبیق پذیر

سهراب سهرابی لاله[۱]، حمید مرتضی اصل[۲,*]

[۱]استادیار، گروه ریاضیات و علوم کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی شبستر، شبستر، Dr.sohrabi.laleh@gmail.com

[۲]استادیار، گروه ریاضیات و علوم کامپیوتر، دانشگاه آزاد اسلامی شبستر، شبستر، h_mortazasl@yahoo.com

---

چکیده. امروزه، تعداد زیادي از پدیده هاي مهم فیزیکی توسط مسائل اشتورم-لیوویل کسری مدل سازی می شوند، از اینرو، بررسی توابع و مقادیر ویژه این گونه مسائل مورد توجه بسیاری از محققان است. در این مقاله مقادیر ویژه رده ای از مسائل اشتورم-لیوویل کسری تطبیق پذیر را با استفاده از روش تجزیه آدومیان تقریب خواهیم زد. سپس به محاسبه توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه آن می پردازیم. مثالهای عددي کارآمدی و موثر بودن روش ارائه شده را نشان می دهند.

واژه‌های کلیدی: مسائل اشتورم-لیوویل کسری تطبیق پذیر، مقادیر و توابع ویژه، روش تجزیه آدومیان.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 26A33, 34L10, 34B24.

---

۱. مقدمه

اخیراً، در [۴] تعریف جدید از مشتق کسری موضعی ارائه شده است که اکثر خواص مشتقات معمولی را برآورده می کند. این تعریف به مشتق کسری تطبیق پذیر[۱] معروف است و یک تکنیک قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل حاصل از مدلهای فیزیکی مانند معادله انتشار و موج کسری به کمک آن ارائه می شود [۵]. البته مشتق کسری تطبیق پذیر دارای یک سری معایب هم هست که خوشبختانه بسیاری از آنها در [۲] بهبود یافته است. در این مقاله، عملگر کسری زیر را تعریف می کنیم

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta} := \mathcal{D}_a^{\alpha}\left[p(x)^{\beta}\mathcal{D}_b\right] + q(x), \qquad (۱)$$

حال، مسئله مقدار ویژه به فرم

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}y(x) - \lambda w_{\alpha}(x)y(x) = ۰, \quad x \in [a,b], \qquad (۲)$$

را در نظر می گیریم، که $\mathcal{D}_a^{\alpha}$ و ${}^{\beta}\mathcal{D}_b$ به ترتیب، مشتق کسری تطبیق پذیر چپ، راست از مرتبه $۰ < \alpha, \beta \leq ۱$ بوده و $\forall x \in [a,b], p(x) \neq ۰$ و $w_{\alpha}(x)$ تابع وزن نامنفی و $q(x)$ تابع پتانسیل می باشد. همچنین توابع w_{α}، p و q در بازه $[a,b]$ حقیقی مقدار پیوسته اند، و شرایط مرزی عبارتند از:

$$c_۱y(a) + c_۲{}^{\beta}\mathcal{D}_by(a) = ۰,\ d_۱y(b) + d_۲{}^{\beta}\mathcal{D}_by(b) = ۰, \qquad (۳)$$

با $c_۱^۲ + c_۲^۲ \neq ۰$ و $d_۱^۲ + d_۲^۲ \neq ۰$.
فرض کنید $\alpha \in (m-۱, m]$، $m \in \mathbb{N}$، در اینصورت تعاریف و قضایای زیر داریم:

---

[*]ارائه دهنده

[۱]Conformable fractional derivative

تعریف ۱٫۱. مشتق کسری تطبیق پذیر چپ تابع $f:[s,\infty)\to\mathbb{R}$ شروع شده از $s\in\mathbb{R}$، از مرتبه α عبارت است از

$$T_s^\alpha f(t)=\lim_{\epsilon\to0}\frac{f^{(m-1)}\left(t+\epsilon(t-s)^{m-\alpha}\right)-f^{(m-1)}(t)}{\epsilon},\ T_s^\alpha f(s)=\lim_{t\to s^+}T_s^\alpha f(t),\quad t>s,$$

و $T_s^\alpha f(s)=\lim_{t\to s^+}T_s^\alpha f(t)$ به شرط وجود حد و $(m-1)$-بار تابع $f(t)$ در $t>s$ مشتق پذیر باشد. همچنین، مشتق کسری تطبیق پذیرراست تابع $f:(-\infty,s]\to\mathbb{R}$ ختم شده به $s\in\mathbb{R}$، از مرتبه α عبارت است از

$${}^{\alpha}T_s f(t)=(-1)^m\lim_{\epsilon\to0}\frac{f^{(m-1)}\left(t+\epsilon(s-t)^{m-\alpha}\right)-f^{(m-1)}(t)}{\epsilon},\quad t<s,$$

و ${}^{\alpha}T_s f(s)=\lim_{t\to s^-}{}^{\alpha}T_s f(t)$ به شرط وجود حد و $(m-1)$-بار تابع $f(t)$ در $t<s$ مشتق پذیر باشد.

تعریف ۱٫۲. انتگرال کسری تطبیق پذیر چپ تابع $f:[s,\infty)\to\mathbb{R}$ شروع شده از $s\in\mathbb{R}$، از مرتبه α عبارت است از

$$I_s^\alpha f(t)=\frac{1}{(m-1)!}\int_s^t(t-x)^{m-1}f(x)\mathrm{d}_\alpha(x,s),\quad \mathrm{d}_\alpha(x,s)=(x-s)^{\alpha-m}\mathrm{d}x,\quad t>s.$$

انتگرال کسری تطبیق پذیر راست تابع $f:(-\infty,s]\to\mathbb{R}$ ختم شده به $s\in\mathbb{R}$، از مرتبه α عبارت است از

$${}^{\alpha}I_s f(t)=\frac{1}{(m-1)!}\int_t^s(x-t)^{m-1}f(x)\,{}_{\alpha}\mathrm{d}(s,x),\quad {}_{\alpha}\mathrm{d}(s,x)=(s-x)^{\alpha-m}\mathrm{d}x,\quad t<s.$$

قضیه ۱٫۳. فرض کنید تابع $f:[s,\infty)\to\mathbb{R}$، $(m-1)$-بار دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$$I_s^\alpha T_s^\alpha f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k,\quad T_s^\alpha I_s^\alpha f(t)=f(t),\quad \forall t,\,t>s.$$

قضیه ۱٫۴. فرض کنید تابع $f:(-\infty,s]\to\mathbb{R}$، $(m-1)$-بار دیفرانسیل پذیر باشد، آنگاه

$${}^{\alpha}I_s{}^{\alpha}T_s f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k\frac{f^{(k)}(s)}{k!}(s-t)^k,\quad {}^{\alpha}T_s{}^{\alpha}I_s f(t)=f(t),\quad \forall t,\,t<s.$$

روش حل مورد استفاده برای حل دسته معادلات (۲) بر اساس یک تکنیک عددی کارآمد به نام روش تجزیه آدومیان که توسط بسیاری از نویسندگان به منظور حل چندین نوع معادله دیفرانسیل استفاده شده است [۱،۳]. در ادامه مقاله، اجرای روش تجزیه آدومیان روی مسئله (۲) با استفاده از حساب کسری تطبیق پذیر می باشد که قبلا در مورد مشتقات کسری ریمان-لیوویل و کاپوتو مورد بحث قرار گرفته است. نتایج عددی در بخش آخر ارائه خواهد شد.

۲. تجزیه و تحلیل روش تجزیه آدومیان

در این بخش، بحث مختصری از الگوریتم برای حل عملگر $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$ با دو مقدار مرزی را ارائه می دهیم، مسئله مقدار ویژه ارائه شده توسط (۲) را به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$\Phi y(x)=\Lambda, \tag{۴}$$

که در آن $\Phi=\Phi(x,\mathcal{D}_a^\alpha,{}^{\beta}\mathcal{D}_b)$ به عنوان یک عملگر معکوس است و $\Lambda=\Lambda(\lambda,x,y,{}^{\beta}\mathcal{D}_b)$ یک عملگر خطی شامل سایر عبارات است. به وضوح، عملگر Φ به فرم $\Phi(x,\mathcal{D}_a^\alpha,{}^{\beta}\mathcal{D}_b)=\mathcal{D}_a^\alpha p\,{}^{\beta}\mathcal{D}_b$ انتخاب می گردد. معکوس عملگر Φ را به شکل

$$\Phi^{-1}=\int_x^b\frac{1}{p(t)}I_a^\alpha(\cdot)\,{}_{\beta}\mathrm{d}(b,t)$$

معرفی کرده، با بکارگیری قضیه ۱٫۳، ۱٫۴ و اعمال Φ^{-1} در سمت چپ معادله (۴) داریم

$$(\Phi^{-1}\Phi)(y(x))=y(x)-y(b)-p(a)^{\beta}\mathcal{D}_b y(a)\int_x^b\frac{1}{p(t)}\,{}_{\beta}\mathrm{d}(b,t)$$

، که در آن شرایط اولیه $y(b)$ و ${}^{\beta}\mathcal{D}_b y(a)$ باید معلوم باشند. بنابراین، از معادله (۴) نتیجه خواهد شد

$$y(x) = y(b) + p(a)^{\beta}\mathcal{D}_b y(a) \int_x^b \frac{1}{p(t)}\, {}_{\beta}\mathrm{d}(b,t) + \int_x^b \frac{1}{p(t)} I_a^{\alpha}\Lambda\Big(\lambda, t, y(t), {}^{\beta}\mathcal{D}_b y(t)\Big)\, {}_{\beta}\mathrm{d}(b,t). \tag{5}$$

در روش تجزیه آدومیان، فرض می‌کنیم که جواب $y(x)$ را می توان با یک سری نامتناهی به شکل $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$ نمایش داد، و عبارت Λ را با یک سری نامتناهی از چندجمله ایها

$$\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \tag{6}$$

نشان می دهیم، که درآن A_n چند جمله ایهای آدومیان اند و

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\mu^n}\left[\Lambda\left(\sum_{i=0}^{\infty}\mu^i y_i\right)\right]_{\mu=0},$$

از (۵) و (۶) داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = y(b) + p(a)^{\beta}\mathcal{D}_b y(a) \int_x^b \frac{1}{p(t)}\, {}_{\beta}\mathrm{d}(b,t) + \sum_{n=0}^{\infty}\Phi^{-1}A_n(x). \tag{7}$$

ویژگی خطی بودن عملگر Φ^{-1} در بالا استفاده شده است. پس، روابط بازگشتی زیر را از معادله (۷) معرفی کنیم

$$y_0(x) = y(b) + p(a)^{\beta}\mathcal{D}_b y(a) \int_x^b \frac{1}{p(t)}\, {}_{\beta}\mathrm{d}(b,t), \quad y_{n+1}(x) = \Phi^{-1}A_n(x), \quad n \geqslant 0, \tag{8}$$

که در آن $A_n(x) = \big(\lambda w_{\alpha}(x) - q(x)\big)y_n(x)$. سری جواب، (سری $y(x)$) مستقیماً نتیجه می شود و دقت جواب قطعاً به تعداد جملات محاسبه شده بستگی دارد.

۳. نتایج عددی

در این بخش، چند مسئله مقدار ویژه کسری تطبیق پذیر را با استفاده از روشی که در بالا توضیح داده شد، حل می کنیم.

مثال ۳٫۱. مسئله مقدار ویژه کسری تطبیق پذیر منظم $\mathcal{D}_0^{1/2}y'(x) - \lambda y(x) = 0,\ x \in (0,1)$ با شرایط مرزی $y'(0) = y(1) + y'(1) = 0$ را در نظر بگیرید، معادله را می توان با عملگر به فرم $\Phi y(x) = -\lambda y(x)$ نوشت. با اعمال Φ^{-1} و استفاده از شرایط اولیه در $x = 0$ خواهیم داشت:

$$y(x) = y(1) - p(0)y'(0)\int_x^1 \mathrm{d}t - \lambda\int_x^1 I_0^{1/2}y(t)\mathrm{d}t, \quad \alpha = 1/2, \beta = 1,$$

در نتیجه

$$y(x) = A - \lambda\int_x^1\int_0^t y(s)s^{-1/2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \quad A = y(1).$$

طبق فرآیند گفته شده جملات دنباله عبارتند از:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= A,\\
y_1(x) &= \frac{4A\lambda}{3}\big(x^{3/2} - 1\big),\\
y_2(x) &= \frac{2A\lambda^2}{9}\big(x^3 - 8x^{3/2} + 7\big),
\end{aligned}$$

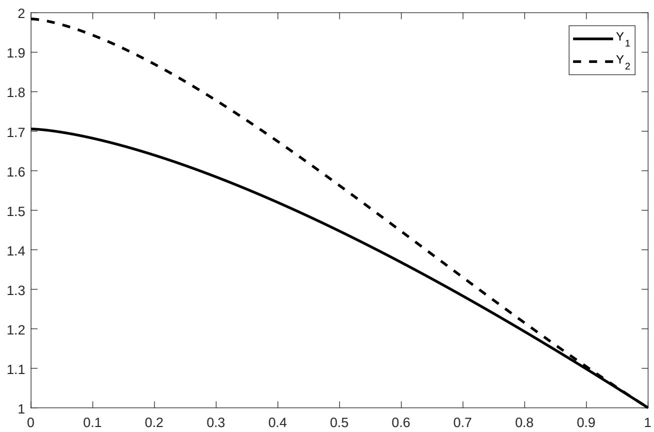
$$y_3(x) = \frac{4A\lambda^3}{63}\Big(\frac{2x^{3/2}}{9}(x^3 - 21x^{3/2} + 147) - \frac{254}{9}\Big),$$
$$y_4(x) = \frac{4A\lambda^4}{8505}\Big(735x^3 - 5080x^{3/2} + x^6 - 40x^{9/2} + 4384\Big),$$
$$\vdots$$

و تا $y_{40}(x)$ محاسبه می کنیم. این تقریب $y(x)$ را به صورت سری توسط $y(x) \cong \mathbf{y}(x) = \sum_{n=0}^{40} \tilde{y}_n(x)$ بدست می دهد. مقدار ویژه با ریشه های تابع مشخصه $\Delta(\lambda) = y(1) + y'(1) = 0$ منطبق هست.
با توجه به تعداد جملات سری $y(x)$ ، تقریب مقدارهای ویژه در جدول ۱ ارائه شده است. توابع ویژه متناظر با مقادیر

جدول ۱. تقریبهای مقدار های ویژه مسئله.

n	λ_1	λ_2
۱۶	۰.۹۲۲۸۰۴۸۴۰۳۳۳	−۰.۳۲۷۸۵۴۵۵۸۱۹۶
۲۰	۰.۹۱۱۹۱۶۷۸۶۸۶۹	−۰.۳۲۷۸۵۴۵۲۶۶۰۱
۲۶	۰.۹۰۱۹۳۷۶۲۵۲۵۵	−۰.۳۲۷۸۵۴۵۲۵۹۵۰
۳۰	۰.۸۹۷۵۲۴۱۴۱۸۷۵	−۰.۳۲۷۸۵۴۵۲۵۹۴۸
۴۰	۰.۸۹۰۳۸۰۳۹۳۰۵۹	−۰.۳۲۷۸۵۴۵۲۵۹۴۸

ویژه بالا در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. منحنی توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه.

مثال ۳,۲. مسئله مقدار ویژه کسری تطبیق پذیر منفرد $\mathcal{D}_0^{1/2} y'(x) - \Big(\frac{1}{x} + \lambda\Big) y(x) = 0,\ x \in (0,1)$ با شرایط مرزی

$$y'(0) = y(1) = y'(1)$$

را در نظر بگیرید، معادله را می توان با عملگر به فرم $\Phi y(x) = -\Big(\frac{1}{x} + \lambda\Big) y(x)$ نوشت. با اعمال Φ^{-1}

$$y(x) = y(1) - p(0)y'(0)\int_x^1 \mathrm{d}t - \lambda \int_x^1 I_0^{1/2}\Big(\big(\frac{1}{t} + \lambda\big) y(t)\Big)\mathrm{d}t, \quad \alpha = 1/2, \beta = 1,$$

و استفاده از شرایط اولیه و $y(1)-y'(0)=0$ خواهیم داشت:

$$y(x)=Bx-\lambda\int_x^1\int_0^t\left(\frac{1}{s}+\lambda\right)y(s)s^{-1/2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,\quad B=y'(0).$$

طبق فرآیند گفته شده جملات دنباله عبارتند از:

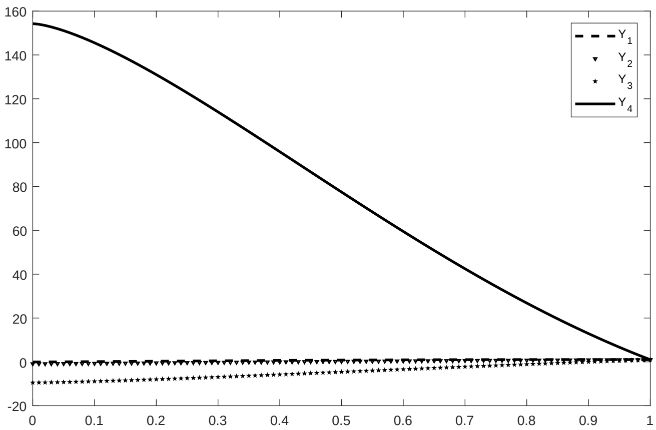
$$\begin{aligned}
y_0(x)&=Bx,\\
y_1(x)&=\frac{4B}{15}\Big(\lambda\big(x^{5/2}-1\big)+5\big(x^{3/2}-1\big)\Big),\\
y_2(x)&=\frac{B}{45}\Big(x^4\lambda^2-12\lambda+12x^3\lambda+16\lambda(\lambda+5)+30x^2-\lambda^2-16x^{3/2}\lambda(\lambda+5)-30\Big),\\
y_3(x)&=\frac{4B\lambda}{31185}\Big(4x^{3/2}\big(15708\lambda+7x^4\lambda^2-462x^{3/2}\lambda^2-1386x^{1/2}\lambda+132x^3\lambda-2310x^{3/2}\lambda\\
&\quad+594x^2-6930x^{1/2}+3465\lambda^2-6930\big)-3010\lambda^2-12144\lambda+13266\Big),\\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

و تا $y_{26}(x)$ محاسبه می کنیم. این تقریب $y(x)$ را به صورت سری توسط $y(x)\cong\mathbf{y}(x)=\sum_{n=0}^{26}\tilde{y}_n(x)$ بدست می دهد. مقدار ویژه با ریشه های تابع مشخصه $\Delta(\lambda)=y'(1)-y'(0)=0$ منطبق هست.

با توجه به تعداد جملات سری $y(x)$ ، تقریب مقدارهای ویژه در جدول ۲ ارائه شده است. توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه بالا در شکل ۲ نشان داده شده است.

جدول ۲. تقریبهای مقدار های ویژه مسئله.

n	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
۱۰	−۴.۹۲۸۵۰۴۱۶۴۵۶۴	۱.۳۳۷۲۷۸۳۵۱۵۴۸	۱.۵۱۹۱۱۰۴۳۴۰۸۳	۲.۱۴۵۰۵۳۲۵۷۳۱۵
۱۵	−۴.۹۲۸۵۰۴۴۱۹۵۰۸	۱.۳۱۲۴۶۰۶۹۲۵۲۵	۱.۹۵۱۹۷۹۸۶۱۹۶۲	۲.۲۲۹۱۵۹۰۵۸۹۵۸
۲۱	−۴.۹۲۸۵۰۴۴۱۹۵۳۶	۱.۵۶۳۹۵۶۵۲۹۹۶۲	۱.۸۶۱۸۱۷۷۷۰۲۲۲	۲.۲۷۱۱۴۹۸۶۳۰۸۹
۲۶	−۴.۹۲۸۵۰۴۴۱۹۵۳۶	۱.۵۲۴۲۳۲۴۴۳۸۱۴	۱.۷۷۶۰۰۵۹۶۳۴۰۹	۲.۲۸۷۹۸۷۰۳۹۸۱۳



شکل ۲. منحنی توابع ویژه متناظر با مقادیر ویژه.

ملاحظه ۳٫۳. هر چند که از نظر تئوري همگرايی روش هاي عددي تضمين شده است، اما در عمل قضيه کمی متفاوت است زيرا بزرگ شدن ضرايب چند جمله ای مشخصه براي تقريب مقادير ويژه نشان می دهد که ما در اينجا با يک مسئله حساس سر و کار داريم که ميل به بدوضعی دارد. براي کنترل بدوضعی ما ترجيح داديم که بجاي درگير شدن با قضاي پيچيده جبر خطی، تعداد رقم هاي موثر در محاسبات را افزايش دهيم. ما با افزايش دقت محاسبات توانستيم تعداد زيادتري از مقادير ويژه را با دقت مطلوب ترمحاسبه کنيم. نتيجه ديگري که بصورت تجربی بدست آمد اين بود که به ازاي برخی از مقادير مشتق کسري و شرايط مرزی، مسئله اشتورم–ليوويل داراي هيچ مقدار ويژه اي نيست.

۴. نتيجه‌گيری

در اين مقاله، حل عددی رده ای از مسائل اشتورم –ليوويل کسری تطبيق پذير را پيشنهاد کرده‌ايم. با بررسی نتايج عددی روش تجزيه آدوميان برای محاسبه مقادير و توابع ويژه بسيار ساده و کارآمد بوده و نتايج خوبی را بدست آورد.

مراجع

1. Q. M. Al-Mdallal, *An efficient method for solving fractional Sturm-Liouville problem*, Chaos, Solitons and Fractals, 40 (2009), 183–189.
2. A. El-Ajou, *A modification to the conformable fractional calculus with some applications*, Alexandria Eng. J. 59 (2020), no. 4, 2239–2249.
3. A. ERCAN, *Adomian decomposition method for solving nonlinear fractional sturm-liouville problems*, Cumhuriyet Sci. J. 41 (2020), no. 1, 169–175.
4. R. Khalil, M. Horani, A. Al Yousef and M. Sababheh, *A new definition of fractional derivative*, J. Comp. Appl. Math. 264 (2014), 65–70.
5. H. Mortazaasl, A.A. Jodayree Akbarfam, *Two classes of conformable fractional Sturm-Liouville problems: Theory and applications*, Math. Meth. Appl. Sci. 44 (2021), no. 1 166–195.