مروری بر کاربرد بهینه‌سازی محدب در بهبود کیفیت فیلم فشرده

راضیه قربانی[۱]، نرجس سابقی[۲]، علیرضا طاوسی[۳]

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر
[۲]استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ولایت، ایرانشهر
[۳] استادیار، گروه مهندسی برق، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ولایت، ایرانشهر

چکیده

داده های ویدیویی و فیلم‌های دوران حاضر بدلیل محدودیت‌های مخابراتی و پهنای باند، غالباً باید صورت فشرده در دسترس کاربران قرار گیرند. معمولاً کیفیتهای قابل مشاهده مختلف از یک دنباله‌ی ویدئویی در دسترس کاربر گذارده می‌شود که این نسخه ها با سطوح مختلف فشرده‌سازی و وضوح متفاوتی ارایه می‌شوند. این تکنیک فراتفکیک‌پذیری نام دارد که در آن با ترکیب اطلاعات پیکسل-های یک یا چند رشته تصویر با وضوح پایین، می‌توان تصویری با وضوح بیشتر داشت. در حال حاضر، مطالعه الگوریتم‌های تکنیک فرا تفکیک پذیری یکی از زمینه‌های تحقیقاتی مهم دنیای مخابرات ویدیوئی هستند که بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در این مقاله که با رویکرد مروری نوشته شده است، برخی روش‌های موجود برای بهبود کیفیت تصاویر و فیلمهای ویدیوئی با تاکید بر پایه بهینه‌سازی محدب است، را بررسی نموده و مروری خواهیم داشت.

واژه های کلیدی

آنالیزمحدب، بهینه سازی محدب، الگوریتم نقطه پروگزیمال، کیفیت ویدئو، وضوح تصویر.

مقدمه

امروزه معمولا فیلم‌ها بدلیل محدودیت‌هایی که توسط فناوری‌های انتقال در پایگاه داده‌های بزرگ از جمله یوتیوب وجود دارد به صورت فشرده در دسترس قرار می‌گیرند. علاوه بر این، معمولا مشاهدات مختلف از یک دنباله‌ی ویدئویی با سطوح مختلف فشرده‌سازی و وضوح‌های متفاوت، در دسترس است. تکنیک فراتفکیک‌پذیری[۱] (SR) روشی است که در آن با ترکیب اطلاعات پیکسل‌های یک یا چند رشته تصویر با وضوح پایین[۲]، می‌توان تصویری با وضوح بالای[۳] نظیر آنها را بازسازی کرد. در حال حاضر، الگوریتم‌های SR یکی از زمینه‌های تحقیقاتی مهم هستند که بسیار مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند. به طورکلی، الگوریتم‌های SR را می‌توان به دو رویکرد تک‌فریم یا چندفریم تقسیم کرد. رویکرد دوم، که از حرکت میان فریم‌های متوالی LR استفاده می‌کند، در واقع به منظور استخراج اطلاعات منحصر بفرد موجود در هر نمایش بکار برده می‌شود. برای فرمول‌بندی مساله، در اکثر موارد اینگونه فرض می‌شود که تعداد بسیاری تصویر (۵ تا۳۰ تصویر) در دسترس هستند و این تصاویر در معرض عملیات‌های مختلفی نظیر تغییر پیکسل (چرخش، انتقال)، مات شدن و نمونه‌برداری کاهشی قرار می‌گیرند.

بهینه‌سازی محدب به عنوان یک ابزار کلیدی در آنالیز و حل مسائل محاسباتی استفاده می‌شود. از جمله کاربردهای بهینه‌سازی محدب، می‌توان به نقش آن در بهبود کیفیت فیلم اشاره کرد. در دهه-های گذشته، تکامل پیوسته‌ی سیستم‌های انتقال و سیستم‌های ذخیره‌سازی و همچنین تکامل فناوری فشرده‌سازی فیلم، باعث شد تا برای کاربر نهایی، امکان دسترسی به محتوای ویدئویی آسان باشد. علی‌رغم اینکه دنباله‌های ویدئویی دارای وضوح و کیفیت بالایی هستند (با کیفیت استودیو ضبط شده‌اند)، اما می‌بایست این دنباله‌ها با الزاماتی خاص و همچنین با محدودیت‌هایی که توسط فناوری‌های انتقال و ذخیره‌سازی اعمال شده است، مطابقت داشته باشد. بنابراین، این دنباله‌ها معمولا با کیفیت پایین توسط جدیدترین فناوری کدگذاری ویدئویی پربازده (HEVC[۴]) نمونه‌برداری و فشرده‌سازی می‌شوند. برای آنکه کاربر نهایی یک ویدئوی با وضوح بالا را مشاهده کند باید کیفیت ویدئو بهینه شود. روش‌هایی که در حال حاضر از آنها استفاده می‌شود، نسبت به ویژگی‌های مختلف انواع الگوریتم‌های کدگذار ویدئو، بی‌توجه هستند. این در حالیست که، آن دسته از روش‌های بازسازی ویدئو که از منابع فشرده استفاده می‌کنند نیز تاثیری در بهبود وضوح تصویر ندارند. در جدیدترین پژوهش، چارچوبی برای افزایش میزان کیفیت ویدئوی فشرده ارائه می‌شود؛ این چارچوب از چندین منبع استفاده می‌کند و در آن هر تصویر می‌تواند یک سطح فشرده‌سازی متفاوت و همچنین وضوحی متفاوت داشته باشد، سپس با استفاده از فرمول مبتنی بر الگوریتم جدید تقسیم اولیه دوگان، چندین تصویر مختلف از یک ویدئو به شیوه‌ای کارآمد با یکدیگر ترکیب می‌گردد[۱]. آزمایش-هایی نیز بر روی چندین دنباله‌ی ویدئویی کدگذاری شده، انجام شده

---

[۱] Super Resolution
[۲] Low Resolution
[۳] High Resolution
[۴] High Efficiency Video Coding

است که این دنباله‌ها با استفاده از روش HEVC کدگذاری شده‌اند؛ این آزمایش‌ها در سطوح مختلف فشرده‌سازی، و با استفاده از وضوح‌های متفاوت از یک ویدئو به اجرا در می‌آیند (این تفاوت در وضوح تصویر، به دلیل استفاده از روش‌های نمونه‌برداری کاهشی است). نتایج آزمایش‌های تجربی نشان از تاثیرپذیری بالای این روش دارد.

در این مقاله که با رویکرد مروری نوشته شده است، برخی روش‌های موجود برای بهبود کیفیت فیلم با تاکید بر روش ارائه شده در مرجع [۱] که بر پایه بهینه‌سازی محدب است، را بررسی نموده و مرور خواهیم کرد.

مروری بر برخی روش‌های موجود

برخی پژوهشگران مساله الگوریتم SR را جهت بهبود کیفیت ویدئو مورد بررسی قرار داده‌اند ([۲]، [۳]، [۴] و [۵]). در این مراجع الگوریتم پیشنهادی به کمک روش MAP[۵] (روش بیشترین احتمال پسین که براساس قانون بیز می‌باشد) و با استفاده از نسخه‌های فشرده ویدئو، طراحی شده است. روش MAP در صورت دارا بودن پیشین‌های محدب دلالت بر بهینه‌سازی محدب دارد، یعنی اطمینان از وجود یک راه‌حل واحد و منحصر به فرد، اجازه‌ی استفاده از بهینه‌سازی نزولی کارآمد را می‌دهد [۶]. وانگ و همکارانش در [۷] مسئله بهبود ویدئوی فشرده را از منظری متفاوت مطالعه کرده‌اند. این نویسندگان، چارچوبی عملی را ارائه داده‌اند؛ این چارچوب با ترکیب کدگذاری‌های مختلفی که برای یک دنباله ویدئویی یکسان مورد استفاده قرار می‌گیرند، کیفیت ویدئو را افزایش می‌دهد. در این سناریو، ویدئوهای دنیای واقعی با استفاده از MPEG-۲ و در دو پیکربندی کدگذاری می‌شوند. الگوریتم پیشنهادی آنها قادر است که دو فیلم کدگشایی شده را با یکدیگر ترکیب کند. طبق آنچه گزارش شده است، علی‌رغم اینکه دستاوردهای این الگوریتم به ۱/۵ دسی‌بل هم می‌رسد، اما هنوز هیچ افزایشی در وضوح تصویر ایجاد نشده است. بویاجیس و همکاران در مرجع [۸] مساله‌ی بهبود کیفیت ویدئو را براساس یک نسخه فشرده و با استفاده از روش بهینه‌سازی محدب مورد بررسی قرار داده‌اند که دستاورد این روش در برخی موارد، تا حدودی بیشتر از روش SR تک تصویره‌ی مبتنی بر یادگیری [۹] (یکی از بهترین روش‌های SR) می‌باشد. در این روش پتانسیل SR برروی پیش‌بینی درون‌فریمی متمرکز شده است.

در مرجع [۱۰]، که تعمیم یافته‌ی روش مرجع [۸] است، مساله‌ی بهبود کیفیت ویدئو را براساس یک نسخه فشرده و با استفاده از روش بهینه‌سازی محدب بررسی می‌کند با این تفاوت که از دو روش پیش‌بینی دورن‌فریمی و برون‌فریمی در چارچوب SR، بهره گرفته شده است. دستاورد این روش با توجه به آزمایش‌های تجربی، بیشتر از روش [۸] می‌باشد.

تاکنون هیچ الگوریتمی برای ارائه‌ی یک راه‌حل ایده‌آل و حل مسئله‌ی افزایش وضوح ویدئوهای فشرده (برای تصاویر متعددی که به ازای یک ویدئو وجود دارند) ارائه نشده است. پوریکا و همکاران در مرجع [۱] روش جدیدی را جهت افزایش کیفیت ویدئو براساس نسخه‌های فشرده با استفاده از روش بهینه‌سازی محدب ارائه داده‌اند. آنها با توجه به مرجع [۸] و [۱۱]، و با الهام از روش معرفی شده در مرجع [۷]، چارچوبی عملی پیشنهاد داده‌اند؛ چارچوبی که قادر است وضوح یک دنباله‌ی ویدئویی را براساس چندین منبع فشرده مبتنی بر HEVC و با وضوح مختلف، بازسازی و تقویت کند که نتایج SR را به شکل خیلی نزدیک به نسخه فشرده[۶] ارائه می‌دهد. در واقع آنان روش وضوح فوق‌العاده جدیدی ارائه داده‌اند که قادر است وضوح ویدئو را براساس چندین نسخه (مشاهده) یکسان از همان ویدئو اما متفاوت در سطح فشرده‌سازی و کیفیت، بازسازی و تقویت کند. ابتدا مساله وضوح فوق‌العاده در دامنه فشرده (به دلیل استفاده از مشاهدات فشرده) برای هر فریم (تصویر) فیلم مدلسازی ریاضی می‌شود که عبارتند از: (۱) مدلسازی فرایند نمونه‌برداری کاهشی: چندین فریم متفاوت دارای وضوح پایین (LR) مربوط به هر فریم فیلم ایجاد می‌گردد. (۲) جهت خلاصه‌سازی هرکدام از فریم های فیلم (با استفاده از فریم‌های مرجع) و سپس فشرده‌سازی در سطوح مختلف، از جدیدترین روش کدگذاری ویدئویی پر بازده (HEVC)، استفاده می‌شود . (۳) مساله‌ای که حاصل می‌گردد یک مساله بهینه‌سازی محدب نامقید است که باید مینیمم شود. این مساله شامل دو تابع هدف، تابع مشخصه مجموعه محدب (ناحیه شدنی) و تابع مشخصه محدودیت‌ها می‌باشد و هدف یافتن فریمی با وضوح فوق‌العاده است. در ادامه روش پوریکا و همکارانش که از آخرین روش‌های ارائه شده برای بهبود کیفیت فیلم از روی چندین نسخه است، با جزئیات بیشتر بیان می‌شود.

روش پوریکا و همکاران [۱]

در مدل پیشنهادی دنباله‌ی فریم‌های ویدئوی با کیفیت بالا به صورت $\bar{x} = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k]$ تعریف می‌شود به طوری که برای هر $i \in [1, K]$، $\bar{x}_i \in \mathbb{R}^N$. در یک طرح فشرده‌سازی همراه با پیش‌بینی درون‌فریمی و برون‌فریمی مربوط به تصاویر کیفیت پایین از m رمزگذار استفاده می‌شود، برای هر $m \in \{1, \dots, M\}$ در واقع m اُمین رمزگذار، برداری از ضرایب را به صورت $z_{m,i} \in \mathbb{R}^{P_{m,i}}$ تولید می‌کند؛

[۵] Maximum A Posteriori

[۶] Compressed Observation

که این بردار یک نسخه‌ی کمی‌سازی[۷] شده است که توسط اعمال عملگر کمی‌سازی $Q_{m,i}$ بر $\bar{y}_{m,i}$ حاصل می‌شود که اصطلاحا به آن سطح بازسازی شده نیز می‌گویند. $\bar{y}_{m,i}$ ضریب تبدیل است که خروجیِ مربوط به یک تبدیل خطیِ است. این تبدیل خطی با اعمال عملگر $T_{m,i}$ به $L_{m,i}\bar{x}_i$ انجام می‌گردد. $L_{m,i}$ در واقع عملگر نمونه‌برداری کاهشی است که با m اُمین رمزگذار برای فرم i استفاده می‌شود:

$$\bar{y}_{m,i} = T_{m,i}L_{m,i}\bar{x}_i$$
$$z_{m,i} = Q_{m,i}(\bar{y}_{m,i})$$

از طرفی تبدیل‌های خطی مورد نظر به طور مستقیم به بلوک‌ها اعمال نمی‌شود بلکه بر روی سایر بخش‌هایی از یک فریم که تمایزی آشکار با پیش‌بینی مورد نظر دارند اعمال می‌گردتد یعنی تبدیل خطی بر روی خطای حاصل از پیش‌بینی یک فریم انجام می‌شود . بنابراین، تصویر پیش‌بینی شده‌ی حاصل از اعمال mامین کدگذار بر روی تصویر i را با $\tilde{x}_{m,i}$ نمایش می‌دهیم. تبدیل خطی اعمال شده بر روی تصویر، به منظور پردازش راحت‌تر و عملگر کمی‌سازی برای حذف داده‌هایی در تصویر که دارای ارزش کمتری هستند، استفاده می‌گردد.

مدل پیشنهادی مورد بررسی، راستی[۸] یک مشاهده در دامنه فشرده (تبدیل یافته) را بررسی می‌کند. تابع هزینه‌ی راستی‌آزمایی در دامنه‌ی فشرده، به اندازه‌گیری میزان فاصله تا سطوح بازسازی ($z_{m,i}$) می‌پردازد و به فرم زیر است:

$$J_{DF}(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{M} \alpha_m \varphi\big(T_{m,i}\ \big(L_{m,i}(\hat{x}_i) - \tilde{x}_{m,i}\big) - z_{m,i}\big)$$

که در آن φ نرم دو و $\hat{x}_i$ یک بازسازی از فریم i ام است.

از آنجا که محدودیت‌های کمی‌سازی به شکل یک مجموعه‌ی محدب بسته‌ی $C_{m,i}$ در نظر گرفته می‌شوند، بنابراین، می‌توانند به طور مستقیم در فرمول‌بندی مساله‌ی بهینه‌سازی جای گیرند.

بنابراین شرط مقبولیت جواب را می‌توان به این صورت بیان کرد که به دنبال پیدا کردن $\hat{x}_i$ هستیم به طوری که:

$$T_{m,i}\ \big(L_{m,i}(\hat{x}_i) - \widetilde{x_{m,i}}\big) \in C_{(m,i)},$$
$$\forall m \in [1, M], \forall i \in [1, K]$$

سپس یک قید محدوده تعریف می‌گردد که موجب می‌شود مقادیر پیکسل حاصل از حل، در محدوده‌ای خاص قرار گیرند که این محدوده به نوعی به دامنه‌ی برنامه، بستگی دارد:

$$x_{min}^{(i)} \leq \hat{x}_i \leq x_{max}^{(i)}, \forall i \in [1, k]$$

سرانجام، یک قید همواری برای مقابله با نویز یا ناهمواری، بر روی نتیجه اعمال می‌شود. برای اندازه‌گیری ناپیوستگی‌های جواب از فرمول تغییرات کلی[۹] (TV) [۱۲]، استفاده می‌کنیم و بر این اساس، نتیجه‌ی SR با قید زیر محدود خواهد شد:

$$\forall i \in [1, k], \mathrm{TV}(\hat{x}_i) \leq \eta_i$$

با توجه به اینکه سه قید تعریف شده‌ی قبلی ممکن است برای تضمین پیدا کردن یک جواب مناسب کافی نباشند، بنابراین یک تابع هدف اضافی نیز تعریف می‌شود که مساله‌ی مینیمم‌سازی را با یک "سوپررزولوشن پیشین" که یکی از روش‌های ارائه شده جهت افزایش وضوح کیفیت فریم است، به توازن می‌رساند. برای این منظور مجموعه-ای از عملگرهای $H_{m,i}$ به عنوان عملگرهای افزایشی تعریف می‌گردد که به منظور بهینه‌سازی عملگرهای $L_{m,i}$ استفاده می‌شود. سوپررزولوشن پیشین به عنوان فاصله‌ی راه‌حل $\hat{x}$ از نسخه نمونه‌برداری کاهشی‌اش (نسخه با وضوح پایین $\tilde{x}$) که عملگر بهینه $H_{m,i}$ بر آن اعمال گشته و آن را تبدیل به نسخه نمونه‌برداری افزایشی (نسخه با وضوح بالا) می‌کند، تعریف می‌شود و با استفاده از معیار مناسب ψ_m این فاصله باید مینیم گردد:

$$J_{SR}(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{m=1}^{M} \psi_m\big((Id - H_{m,i}L_{m,i})\hat{x}_i\big)$$

در نهایت مدل SR در دامنه فشرده در قالب یک فرمول جمع بندی می‌شود:

$$\hat{x} \in arg \min_{x \in \mathbb{R}^{K \times N}} J_{DF}(x) + J_{SR}(x)$$

$$+ \sum_{i=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} \Big(l_{C_{m,i}}\Big(T_{m,i}\ \big(L_{m,i}(x_i) - \tilde{x}_{m,i}\big)\Big)\Big) +$$

$$\sum_{i=1}^{K}\sum_{m=1}^{M} \Big(\sum_{s=1}^{S} l_{D_s(m,i)}(F_s(x_i))\Big)$$

در اینجا $l_{C_{m,i}}$ تابع مشخصه‌ی مجموعه محدب $C_{(m,i)}$ و $l_{D_s(m,i)}$ تابع مشخصه مجموعه محدب D است. از آنجا که این دو مجموعه محدب و بسته هستند لذا تابع مشخصه‌ی مربوط به هر یک از این مجموعه‌ها نیز محدب، سره و نیمه پیوسته پایینی خواهد بود. برای حل این مساله بهینه‌سازی می توان از الگوریتم اولیه-دوگان[۱۰] [۱۳] استفاده نمود.

در این مساله بهینه‌سازی با توجه به اینکه توابع ψ_m و φ_m توابعی سره، محدب و نیمه پیوسته پایینی و ناهموار هستند در نتیجه مشتق‌پذیر نخواهند بود. لذا برای کار با این تابع‌ها، از مفهوم زیردیفرانسیل (∂) که جایگزینی مناسب برای مشتق است استفاده می‌کنیم. زیردیفرانسیل یک نگاشت مجموعه مقدار[۱۱] است یعنی

---

[۷] Quantization
[۸] Fidelity
[۹] Total Variation
[۱۰] Primal-Dual Algorithm
[۱۱] Set-valued

$\partial\varphi: H \to 2^H$. برای یک تابع محدب، سره و نیمه پیوسته پایینی φ بر روی H داریم:

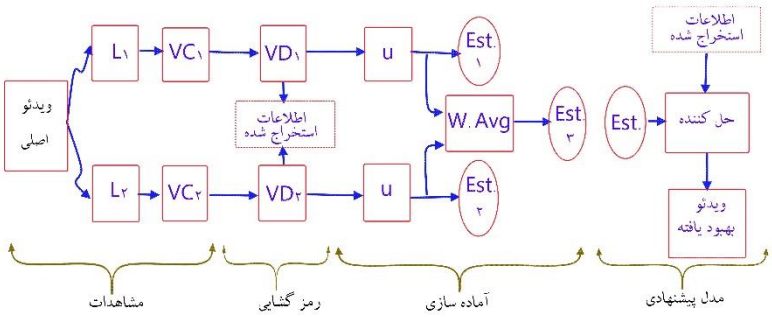
$$x^* \in Argmin\ \varphi \iff 0 \in \partial\varphi(x^*)$$

برای یافتن کمینه تابع به جای زیردیفرانسیل می‌توان از الگوریتم نقطه پروگزیمال[۱۲] کمک گرفت. بدین منظور عملگر پروگزیمیتی را در فضای هیلبرت H با نرم $\|.\|$ برای تابع محدب $\varphi \in \Gamma_0(H)$ بیان می‌کنیم.

$\Gamma_0(H)$ کلاسی از توابع محدب، سره و نیمه‌پیوسته پایینی است. عملگر پروگزیمیتی $\text{prox}_\varphi: H \longrightarrow H$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$prox_\varphi\ u: arg\ \min_{v \in H} \frac{1}{2}\|v-u\|^2 + \varphi(v)$$

کل فرآیند انجام شده جهت افزایش وضوح کیفیت ویدئو توسط نسخه‌های چندگانه‌ی فشرده با استفاده از بهینه‌سازی محدب در دیاگرام زیر با در نظر گرفتن دو نسخه فشرده به صورت شماتیک بیان شده است. لازم به ذکر است جهت حل مساله یک تخمین اولیه از جواب یا همان مقداردهی اولیه لازم است.



(شکل ۱) فرآیند کلی افزایش وضوح کیفیت ویدیو با استفاده از چارچوب پیشنهادی پوریسا و همکاران [۱].

نتایج تجربی نشان می دهد که در بسیاری از موارد، ترکیب نمودن اطلاعات تکمیلی موجود در مشاهدات مختلف، می تواند منجر به ایجاد رویکرد SR بسیار کارآمدتر شود. همچنین می توان نتیجه گرفت که بهبود کیفیت تصویر تا بیش از ۲ دسی بل، با توجه به یکی از بهترین روش های SR تک تصویره‌ی مبتنی بر یادگیری، برای کدگذاری‌های با کیفیت بالا بدست می آید؛ که این امر تاثیر قابـــل توجهی بر روی کیفیت بصری دنباله های ویدئوی بازسازی شده دارد. با توجه به پیچیدگی‌های الگوریتم، می توان گفت که رویکرد پیشنهادی از عملگرهای خطی استفاده می‌کند؛ عملگرهایی که از طریق کانولوشن و عملیات ضرب ماتریسی اعمال می شوند؛ بنابراین، یک اجرای بهینه می تواند تاثیر قابل توجهی در کاهش زمان محاسبات داشته باشد. براساس سناریوی مورد استفاده، الگوریتم می تواند به تعداد تکرارهای نسبتا کم (۱۰ تا۲۰ تکرار)، بهره کمتر و زمان محاسباتی کمتر، محدود شود. همچنین، این نوع از حل‌کننده‌های بهینه سازی محدب را می توان به راحتی برای اجراهای چند هسته‌ای، موازی سازی کرد [۱۴].

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

ارسال فیلم‌های ویدیویی با کیفیت بدلیل محدودیت‌های مخابراتی و پهنای باند، غالباً باید صورت فشرده انجام می‌شود. معمولاً انواع نسخ از کیفیت‌های قابل مشاهده از یک ویدئو با سطوح مختلف فشرده‌سازی و وضوح متفاوت به کمک الگوریتم‌ها و تکنیک فراتفکیک-پذیری در دسترس کاربر قرار می‌گیرد. در این تکنیک با ترکیب اطلاعات پیکسل‌های یک یا چند رشته تصویر با وضوح پایین، می‌توان تصویری با وضوح بیشتر داشت. در این مطالعه مروری، برخی روش‌های موجود برای بهبود کیفیت تصاویر و فیلمهای ویدیوئی بر پایه بهینه‌سازی محدب، بررسی شدند.

منابع

[۱] Purica, Andrei, et al. ”A convex optimization framework for video quality and resolution enhancement from multiple descriptions.” IEEE Transactions on Image Processing ۲۸,٤ (۲۰۱۸): ۱٦٦۱-۱٦۷٤.
[۲] Segall, C. Andrew, et al. "Super-resolution from compressed video." Super-Resolution Imaging (۲۰۰۲): ۲۱۱-۲٤۲.
[۳] Gunturk, Bahadir K., Yucel Altunbasak, and Russell M. Mersereau. "Super-resolution reconstruction of compressed video using transform-domain statistics." *IEEE Transactions on Image Processing* ۱۳,۱ (۲۰۰٤): ۳۳-٤۳.
[٤] Segall, C. Andrew, et al. "Bayesian resolution enhancement of compressed video." IEEE Transactions on image processing ۱۳,۷ (۲۰۰٤): ۸۹۸-۹۱۱.
[٥] Belekos, Stefanos P., Nikolaos P. Galatsanos, and Aggelos K. Katsaggelos. "Maximum a posteriori super-resolution of compressed video with a novel multichannel

[۱۲] Proximal Point Algorithm

image prior and a new observation model." ۱۹th European Signal Processing Conference. IEEE, (۲۰۱۱).
[٦] Babu, R. Sudheer, and K. S. Murthy. "A survey on the methods of super- resolution image reconstruction." International Journal of Computer Applications ۱۵,۲ (۲۰۱۱): ۱-٦.
[۷] Wang, Ci, Gao Yang, and Yap-Peng Tan. "Reconstructing videos from multiple compressed copies." IEEE transactions on circuits and systems for video technology ۱۹,۹ (۲۰۰۹): ۱۳٤۲-۱۳۵۱.
[۸] Boyadjis, Benoit, et al. "Super-resolution of HEVC videos via convex optimization." *2016 IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. IEEE, (۲۰۱٦).
[۹] Timofte, Radu, Vincent De Smet, and Luc Van Gool. "A+: Adjusted anchored neighborhood regression for fast super-resolution." *Computer Vision--ACCV 2014: 12th Asian Conference on Computer Vision, Singapore, Singapore, November 1-5, 2014, Revised Selected Papers, Part IV 12*. Springer International Publishing, (۲۰۱۵).
[۱۰] Boyadjis, Benoît, et al. "Video enhancement with convex optimization methods." *2018 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, (۲۰۱۸).
[۱۱] R. Gaetano, B. Pesquet-Popescu, and C. Chaux, "A convex optimization approach for image resolution enhancement from compressed representations," in ۱۸th International Conference on Digital Signal Processing (DSP), (۲۰۱۳), pp. ۱–۸.
[۱۲] Combettes, Patrick L., and JC. Pesquet. "Image restoration subject to a total variation constraint." IEEE transactions on image processing ۱۳,۹ (۲۰۰٤): ۱۲۱۳-۱۲۲۲.
[۱۳] Combettes, Patrick L., and JeanChristophe Pesquet. "Primaldual splitting algorithm for solving inclusions with mixtures of composite, Lipschitzian, and parallelsum type monotone operators." SetValued and variational analysis ۲۰,۲ (۲۰۱۲): ۳۰۷-۳۳۰.
[۱٤] Gaetano, Raffaele, Giovanni Chierchia, and Béatrice Pesquet-Popescu. "Parallel implementations of a disparity estimation algorithm based on a proximal splitting method." Visual Communications and Image Processing. IEEE, (۲۰۱۲).